كلية التربية

قسم الرياضيات

تذبذب المعادلات التفاضلية الديناميكية ذات التأخيرعلى تدريجات الزمن

رسالة

مقدمة لإتمام متطلبات الحصول على درجة الماجستير

فى إعداد المعلم في العلوم

(رياضيات بحتة)

مقدمة إلى

قسم الرياضيات كلية التربية جامعة عين شمس

مقدمة من الباحثة

هبــة علـــي حســن محــمــد

المعيدة بقسم الرياضيات كلية التربية جامعة عين شمس

تحت إشراف

أ.د. أحمد يونس غالي

أستاذ الرياضيات

كلية التربية جامعة عين شمس

د. حسن أحمد حسن عجوة

أستاذ الرياضيات البحتة المساعد

كلية التربية جامعة عين شمس

د.أحمد محمود خضير

مدرس الرياضيات البحتة

كلية التربية جامعة عين شمس

(٢٠١٢)

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمنِ الرَّحِيمِ

(قَالُواْ سُبْحَانَكَ لاَ عِلْمَ لَنَا إِلاَّ مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ)

سورة البقرة- الآية (٣٢)

كلية التربية

قسم الرياضيات

صفحة العنوان

الإسم: **هبة علي حسن محمد**

الدرجة العلمية: **ماجستيرلإعداد المعلم في العلوم (رياضيات بحتة)**

القسم التابع له: **قسم الرياضيات.**

اسم الكلية: **التربية.**

الجامعة:**عين شمس.**

سنة التخرج: **٢٠٠٧م.**

سنة المنح:**٢٠١٢ م.**

كلية التربية

قسم الرياضيات

رسالة ماجستير

اسم الطالبة: هبة علي حسن محمد

عنوان الرسالة: تذبذب المعادلات التفاضلية الديناميكية ذات التأخير على تدريجات الزمن.

الدرجة العلمية: ماجستير لإعداد المعلم في العلوم
التخصص: رياضيات بحتة

تحت إشراف

أ.د. أحمد يونس غالي

أستاذ الرياضيات

كلية التربية جامعة عين شمس

د. حسن أحمد حسن عجوة

أستاذ الرياضيات البحتة المساعد

كلية التربية جامعة عين شمس

د.أحمد محمود خضير

مدرس الرياضيات البحتة

كلية التربية جامعة عين شمس

الدراسات العليا

ختم الإجازة

أجيزت الرسالة بتاريخ / / م

موافقة مجلس الكلية

/ / م

موافقة مجلس الجامعة

/ / م

الإهـــــداء

إن الحمد لله نحمده ونستعينه ونستغفره ونستهديه، ونصلي ونسلم على المبعوث رحمة للعالمين سيدنا محمد بن عبد الله عليه أفضل الصلاة والسلام. تعتبر الرسالة الإلهية لرسول الله محمد صلي الله عليه وسلم تحريراً للعقول من الخرافات ودعوة للتأمل واكتشاف أسرار الكون "سَنُرِيهِمْ آيَاتِنَا فِي الْآفَاقِ وَفِي أَنْفُسِهِمْ حَتَّى يَتَبَيَّنَ لَهُمْ أَنَّهُ الْحَقُّ أَوَلَمْ يَكْفِ بِرَبِّكَ أَنَّهُ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ شَهِيد " [فصلت:٥٣] وهناك العديد من النصوص التي تحث علي العلم وطلبه، لذا فإني أسأل الله أن يعلمنا ما ينفعنا وأن ينفعنا بما علمنا، وأن ينفع بهذا العمل.

يقول العالم (الفيلسوف) جاليليو:

"إن الرياضيات هي اللغة التي أذا فهمناها لأصبح في استطاعتنا فهم أسرار الكون."

وبهذه المناسبة يسعدني أن أهدي هذه الرساله؛ التي أسأل الله أن يتقبلها وينفع بها، إلى :

- والداي الكرام- أطال الله عمريهما, وأحسن خاتمتهما, ورزقهما الفردوس الأعلى اللذين تحملاني كثيراً و لم يدخرا وقتاً أو جهداً فى مآزرتي و تشجيعي فهما أصحاب الفضل علي بعد الله و رسوله- صلى الله عليه وسلم .
.. إليكما أهدي هذه الرساله عسى الله أن يتقبلها ويجعلها في ميزان حسناتكما، فالنبي صلى الله عليه وسلم- قال :" أنت ومالك لأبيك"
- إخـــوتي أحبتي، نورعيني وضى قلبي، من حبهم يجري في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي ومن آثروني على أنفسهم .
- أســـاتذتي الكرام- نجوم الهدى في ليل الظلام، من كلّت أناملهم ليمهدوا لي الطريق إلى الأمام. فلهم مني جزيل الشكر والتقدير والإحترام.
- زملائـــي الأوفياء- من تجسدت فيهم معاني الحب والوفاء والصدق والعطاء.
- وأخيراً أدعوا الله سبحانه وتعالى أن يتقبل هذا الجهد وأن يجعله زخراً لي يوم القيامة و أن ينفع به المسلمين.

هبة,,,
٢٠١٢

شكر وتقدير

بداية أشكر من تفضل وتكرم، وأعطى وأنعم، ووفق ويسر، خالقي ورازقي وولي نعمتي ربي ورب كل شيء.

فالحمد الذي بنعمته تتم الصالحات، فلقد وفقني الله سبحانه بفضله وجوده ومنه وكرمه في إنجاز هذه الرساله. فالحمد لله على الدوام وله الشكر على التمام، فهو الرَّحْمَنُ عَلَّمَ الْقُرْآنَ خَلَقَ الإِنسَانَ عَلَّمَهُ الْبَيَانَ " الرحمن.(1-4)

والصلاة والسلام على سيد الأنام، وحبيب الرحمن سيدنا محمد- صلى الله عليه وسلم من حثنا على طلب العلم فهو معلم البشرية فصلاة وسلاماً عليه ننال بهما في الدنيا عزة وكرامة، وفي الآخرة صحبة وشفاعة.

كما لا يسعني إلا أن أتقدم بعميق الشكر والإمتنان لهيئة الإشراف وهم :

الأستاذ الدكتور/ أحمد يونس غالي. أستاذ الرياضيات بكلية التربية- جامعة عين شمس لدعمه المستمر وتشجيعه المتواصل والذي علمني الكثير ليس فقط في الجانب العلمي ولكن ايضاً في جوانب الحياه المختلفة.

الدكتور/ حسن أحمد حسن عجوة. أستاذ الرياضيات البحتة المساعد بكلية التربية- جامعة عين شمس الذي أحاطني بالرعاية والإهتمام من خلال اقتراحه لموضوعات البحث وإرشاده المستمر وصبره وعطائه اللامحدود وتوجيهه القيم. ولقد أعطاني الكثير من وقته الثمين. كما زودنى بحكمته والمعلومات العديدة من خلال العديد من المناقشات.

الدكتور/أحمد محمود خضير. مدرس الرياضيات البحتة بكلية التربية- جامعة عين شمس لدعمه المستمروتشجيعه المتواصل. ولبذله قصارى جهده لنجاح هذا العمل من خلال المناقشات العديدة، المراجعات، الملاحظات القيمة. فمجهوده اثناء مراجعة هذه الرساله لايقدر بثمن.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى قسم الرياضيات كلية التربية- جامعة عين شمس ممثلا برئيس القسم **الأستاذ الدكتور/ رأفت رياض** الذي كان لنا خير مشجع وإلى أساتذتي وزملائي الكرام لما أحاطوني به من رعاية وإهتمام خلال سنوات الدراسة فلهم جزيل الشكر.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى أمي ، أبي وإخوتي الذين صبروا وتحملوا الشئ الكثير لأجلي فأنا مدينه لهم بكل شئ.

هبة علي

شكر وعرفان

أتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى السادة الأساتذه الذين قاموا بالإشراف والمتابعه وهم :

- **أ.د. أحمد يونس غالى**

  أستاذ الرياضيات

  كلية التربية جامعة عين شمس

- **د. حسن أحمد حسن عجوة**

  أستاذ الرياضيات البحتة المساعد

  كلية التربية جامعة عين شمس

- **د.أحمد محمود خضير**

  مدرس الرياضيات البحتة

  كلية التربية جامعة عين شمس

وكذلك إلى الأستاذ الدكتور/ رأفت رياض رئيس قسم الرياضيات كلية التربية- جامعة عين شمس والسادة أعضاء هيئة التدريس بالقسم.

والله الموفق,,,,

.

Faculty of Education
Mathematics Department

Oscillation of Delay Dynamic Differential Equations on Time Scales

A Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements of the Master Degree in Teacher Preparation in Science

(Pure Mathematics)

Submitted to:

Department of Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University

By

Heba Ali Hassan Mohamed

Demonstrator at,
Mathematics Department, Faculty of Education, Ain Shams University

Supervised by

Prof. Dr. Ahmed Younis Ghaly
Professor of Mathematics
Faculty of Education
Ain Shams University

Dr. Hassan Ahmed Hassan Agwa
Assistant Professor of Pure Mathematics
Faculty of Education
Ain Shams University

Dr. Ahmed Mahmoud Khodier
Lecturer of Pure Mathematics
Faculty of Education
Ain Shams University

(2012)

Faculty of Education
Mathematics Department

Candidate: Heba Ali Hassan Mohamed

Thesis Title: Oscillation of Delay Dynamic Differential Equations on Time Scales

Degree: Master for Teacher's Preparation in Science

(Pure Mathematics)

Supervisors:

No.	Name	Profession	Signature
1.	**Prof. Dr. Ahmed Younis Ghaly**	Professor of Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University.	
2.	**Dr. Hassan Ahmed Hassan Agwa**	Assistant Professor of Pure Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University.	
3.	**Dr. Ahmed Mahmoud Khodier**	Lecturer of Pure Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University.	

Abstract

This thesis in overall consists of four chapters, distributed as follows:

Chapter 1: contains the basic concepts of the theory of functional differential equation and some preliminary results of the oscillation theory of first and second order delay differential equations.

Chapter 2: we give an introduction to the theory of dynamic equations on time scales, differentiation, integration, and some examples of time scales. Also, we present various properties of the exponential function on arbitrary time scale, and use it to solve linear dynamic equations on time scales.

Chapter 3: we present the most important studies for the oscillation theory of first and second order delay dynamic equations on time and establish some new oscillation criteria for the second order nonlinear delay dynamic equations.

Chapter 4: In this chapter, we present some new oscillation criteria for the second order nonlinear delay dynamic equation with damping and some new oscillation criteria for the second order nonlinear advanced dynamic equation.

Acknowledgements

First of all gratitude and thanks to gracious **Allah** who always helps and guides me. I would like to thank **the prophet Mohamed** "peace be upon him" who urges us to seek knowledge and who is the teacher of mankind. I would like also to thank the supervision committee who are:

Prof. Dr. Ahmed Younis Ghaly, Professor of Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University, who provided me with guidance and continuous encouragement. He learned me many things not only on the scientific side but also in practical and personal life.

Dr. Hassan Ahmed Hassan Agwa, Assistant Professor of Pure Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University, who suggested the topics of the thesis, valuable instructions, guidance and continuous follow up in this study. He offered me much of his precious time and provided me with his wisdom and knowledge through many discussions.

Dr. Ahmed Mahmoud Khodier, Lecturer of Pure Mathematics, Faculty of Education, Ain Shams University, who provided me with guidance and continuous encouragement. He did his best for the success of this work through many discussions, precious comments, valuable reviews and remarks. His efforts during revision of this thesis is an invaluable.

Thanks also are due to **Dr. Raafat Riyad**, Head of Mathematics Department, Faculty of Education, Ain Shams University, and all staff members for providing me with all facilities required to success this work.

Finally, I appreciate my kind parents and my beloved family for their support, patience, sacrifice and continuous encouragement. I owe my mother, my father, my sister, my brothers everything.

Heba Ali

Contents

Contents i

Summary iii

1 Preliminaries 1
- 1.1 Functional Differential Equations . . . 1
  - 1.1.1 Initial Value Problems . . . 1
  - 1.1.2 Introduction to Delay-Differential Equations . . . 5
  - 1.1.3 Application . . . 6
  - 1.1.4 Oscillation and Nonoscillation . . . 7
  - 1.1.5 Some Oscillatory and Nonoscillatory Phenomena Caused by Deviating Arguments . . . 8
- 1.2 Oscillation of First Order Delay Differential Equations 9
  - 1.2.1 **Inequalities and Equations with a Single Delay** 9
  - 1.2.2 Equations with Constant Delay . . . 13
  - 1.2.3 Equations with Variable Delay . . . 16
  - 1.2.4 Equations with Real Coefficients . . . 17
  - 1.2.5 Comparison Theorems and Oscillation . . . 19
- 1.3 Oscillation of Second Order Delay Differential Equations 22
  - 1.3.1 Linear Equations . . . 22
  - 1.3.2 Nonlinear Equations . . . 27

2 Calculus on Time Scales 39
- 2.1 Basic Definitions . . . 40
- 2.2 Differentiation . . . 42
- 2.3 Examples and Applications . . . 47
- 2.4 Integration . . . 50
- 2.5 Chain Rules . . . 55

2.6 The Exponential Function 57
2.7 Initial Value Problems 61

3 Oscillation of Delay Dynamic Equations on Time Scales 65
3.1 First Order Delay Dynamic Equations 66
3.2 Second Order Linear and Half Linear Delay Dynamic Equations 68
3.3 Second Order Nonlinear Delay Dynamic Equations . . 71

4 Oscillation Criteria of Second Order Nonlinear Dynamic Equations 91
4.1 Oscillation Criteria of Second Order Nonlinear Delay Dynamic Equations with Damping 91
4.2 Oscillation Criteria of Second Order Nonlinear Advanced Dynamic Equations on Time Scales 104

Bibliography 115

Chapter 1

Preliminaries

This chapter is considered as a background for the material included in the thesis. In this chapter, we present some basic concepts of the theory of functional differential equations and sketch some preliminary results which will be used in this thesis. Also, we describe some of the recent developments in oscillation theory of first and second order delay differential equations and investigate the existence of oscillatory solutions of second order delay differential equations.

1.1 Functional Differential Equations

1.1.1 Initial Value Problems

In this section, we give the definitions of ordinary differential equations and functional differential equations. Also, we present the statement of the basic initial value problems and classifications of equations with delay.

Definition 1.1.1 *An ordinary differential equation (ODE) is a relation that contains function of only one independent variable, and one or more of its derivatives with respect to that variable for the same arguments values.*

Definition 1.1.2 *[42] A functional equation (FE) is an equation involves an unknown function for different argument values. The differ-*

ence between the argument values of the unknown function and t in the FE are called argument deviations.

Example 1.1.1 *The equations* $x(3t)+4t^3x(6t) = 4$, *and* $x(t) = e^t x(t+1) - [x(t-3)]^2$ *are examples of FEs.*

Remark 1.1.1 *[42] If all argument deviations are constants (as in the second equation of the above example), then the FE is called a difference equation.*

Combining definition 1.1.1 and definition 1.1.2, we obtain the definition of functional differential equation (FDE), or equivalently, differential equation with deviating argument as follows:

Definition 1.1.3 *[42] A functional differential equation is an equation contains an unknown function and some of its derivatives for different argument values. The order of a FDE is the order of the highest derivative of the unknown function. So, a FE may be regarded as a FDE of order zero.*

Definition 1.1.4 *The ordinary differential equation*

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1.1}$$

together with the equation

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

is called an initial value problem (Eq. (1.2) is called an initial condition).

It is well known that under certain assumptions on f the initial value problem (1.1) and (1.2) has the unique solution,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad for \quad t \geq t_0 \tag{1.3}$$

Definition 1.1.5 *The differential equation of the form*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \quad with \quad \tau > 0 \quad and \quad t \geq t_0, \tag{1.4}$$

in which the right-hand side depends on the instantaneous position $x(t)$ and the position at τ units back $x(t-\tau)$, is called an ordinary differential equation with delay or a delay differential equation.